Programme de mathématiques 2nde 2000.
Quelques propositions de problèmes de géométrie plane.

Avertissement important :

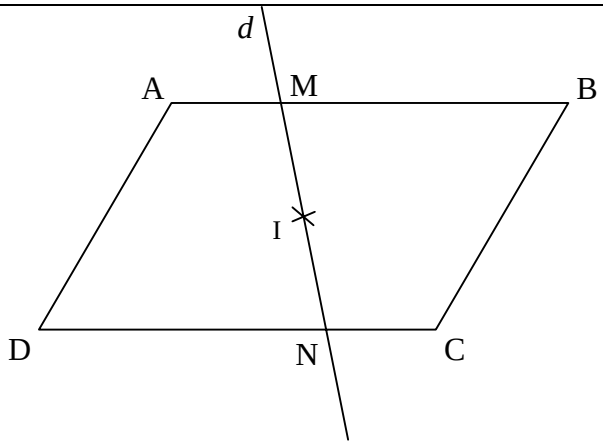
Les propositions faites ici se rattachent au deuxième paragraphe de géométrie du nouveau programme de 2nde (les configurations du plan ; triangles isométriques, triangles de même forme). Il s'agit de problèmes que les acquis de collège permettent de traiter : certains sont d'un abord relativement immédiat, d'autres peuvent servir de trame à plusieurs heures de travail avec la classe[1] ; tous peuvent utilement contribuer aux objectifs "d'apprentissage d'une démarche déductive" et de "maîtrise d'un vocabulaire logique adapté" souhaités par le programme. En aucun cas, cette liste de problèmes ne constitue la liste-type des problèmes à traiter. L'objectif est simplement de montrer la richesse mathématique qu'il est possible de développer dans le cadre du programme.
La plupart des énoncés qui suivent s'inspirent librement de documents APMEP, IREM, CRDP, FFJM, Kangourou ou Rallye.

♦ **Deux exercices "simples" pour montrer différentes approches possibles avec en gras la solution qui paraît être la plus appropriée…. mais vous pouvez ne pas être d'accord !**

Exercice 1 :

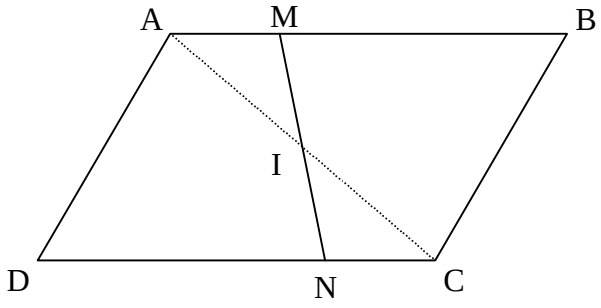
La figure ci-contre représente un parallélogramme ABCD de centre I.
Un droite *d* passant par I coupe le côté[AB] en M et le côté [DC] en N.

Comparer AM et CN.



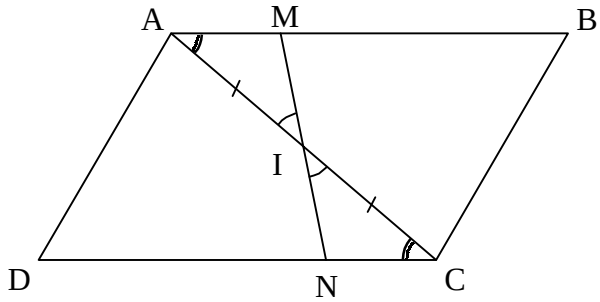
Avec une transformation

Le point I étant le centre de symétrie de ABCD, il est immédiat que le point M a pour image le point N par (S_I) symétrie centrale de centre I.



S_I : A ⟼ C
B ⟼ D
Tout point M du segment [AB] a donc son image M' sur le segment [DC] tel que M, I, M' soient alignés….
S_I : A ⟼ C, M ⟼ N } d'où AM = CN

Avec des triangles isométriques



$\widehat{MAI} = \widehat{NCI}$ comme "alternes-internes"
$\widehat{AIM} = \widehat{CIN}$ comme "opposés par le sommet"
IA = IC car I milieu des diagonales
Les triangles AIM et CIN sont donc isométriques (1er cas d'égalité des triangles)

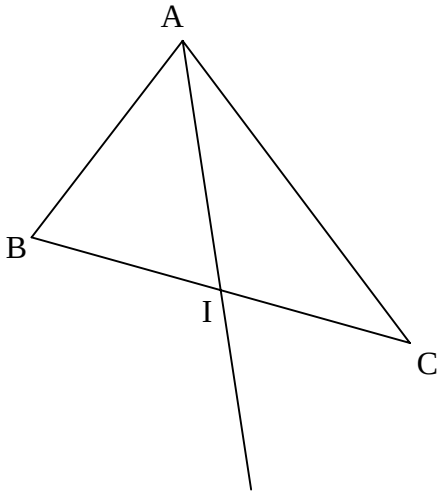
d'où AM = CN.

[1] *« …prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes. »*

Exercice 2 :

Étant donné un triangle quelconque ABC, on appelle respectivement B' et C' les projetés orthogonaux des points B et C sur la médiane (AI) de ce triangle.

Le but de cet exercice est d'étudier la nature du quadrilatère BB'CC'.



Avec une transformation	**Avec des triangles isométriques**
En utilisant la symétrie centrale de centre I, (S_I) . S_I : I $\mapsto$ I B $\mapsto$ C C $\mapsto$ B (AI) $\mapsto$ (AI) $\Delta_B \mapsto \Delta_C$ où Δ_B est la perpendiculaire à (AI) passant par B et Δ_C la perpendiculaire à (AI) passant par C. d'où par S_I : $\Delta_B \cap$ (AI) $\mapsto \Delta_C \cap$ (AI) c'est à dire : B' $\mapsto$ C'…	Les droites (BB') et (CC') sont parallèles car perpendiculaires à une même droite d'où: $\widehat{IBB'} = \widehat{ICC'}$ comme "alternes-internes" or $\widehat{BIB'} = \widehat{CIC'}$ comme "opposés par le sommet" et BI = IC car I milieu de [BC] Les triangles AIM et CIN sont donc isométriques (1er cas d'égalité des triangles) d'où IB' = IC'...
Avec la trigonométrie	**Avec les aires**
$\frac{IB'}{IB} = \sin\widehat{IBB'}$ $\frac{IC'}{IC} = \sin\widehat{ICC'}$ or $\widehat{IBB'} = \widehat{ICC'}$ comme "alternes-internes" et IB = IC d'où : IB' = IC'…	Les triangles ABI et AIC ont même aire (propriété caractéristique d'une médiane), c'est à dire : $\frac{1}{2}$ BB'×AI = $\frac{1}{2}$ CC'×AI d'où : BB' = CC' et comme (BB') // (CC')…

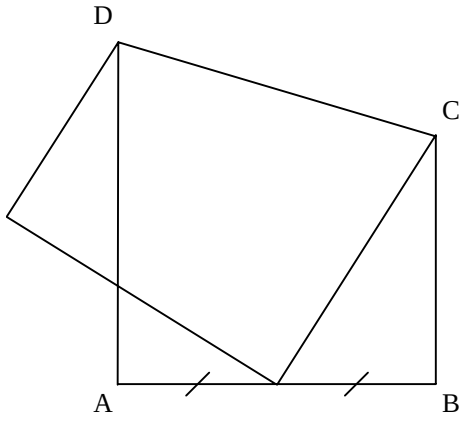
♦ **Exercices pour "apprendre à chercher", comme cela est recommandé dans les commentaires…**

Exemple 1 : exercices assez riche au niveau des « révisions du collège » et permettant également de travailler sur le calcul littéral et les égalités de rapport, etc…

Un problème de pli...

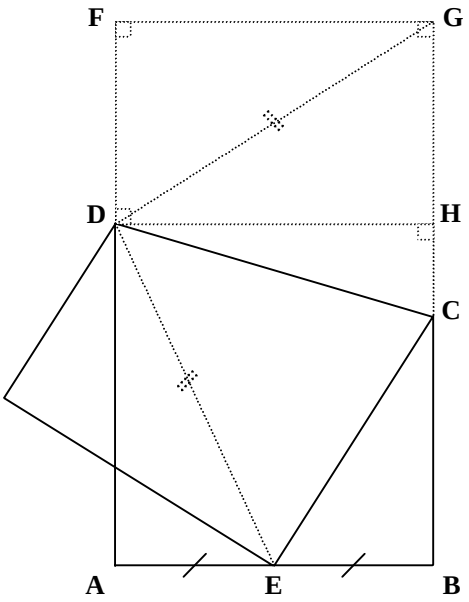
On a plié une feuille rectangulaire, comme indiqué ci-contre, en amenant le coin supérieur droit au milieu du côté inférieur [AB].

Sachant que ce côté [AB] mesure 168 mm et que le pli [CD] mesure 175 mm, trouver la longueur de l'autre côté de cette feuille ...



Présence d'angles droits…

↳ utilisation du théorème de Pythagore…



Par exemple :

Soit L la longueur cherchée ; en posant α = DF et β = CG, on obtient :

$BC^2 + BE^2 = EC^2$ c'est à dire $(L - \beta)^2 + 84^2 = \beta^2$ ① car CE = CG

$AD^2 + AE^2 = ED^2$ c'est à dire $(L - \alpha)^2 + 84^2 = \alpha^2 + 168^2$ ②

car DG = DE

$CH^2 + HD^2 = CD^2$ c'est à dire $(\beta - \alpha)^2 + 168^2 = 175^2$

d'où : $\beta - \alpha = \sqrt{2401} = 49$ ③

De ① et ② on déduit : $\beta = \dfrac{L^2 + 7056}{2L}$ et $\alpha = \dfrac{L^2 - 21168}{2L}$ puis en remplaçant dans ③ on trouve :

$\dfrac{7056 + 21168}{2L} = 49$, d'où : $L = \dfrac{28224}{2 \times 49} = 288$ (mm)

↳ ou trigonométrie dans un triangle… Par exemple :

$HC = \sqrt{175^2 - 168^2} = 49$; $\sin \widehat{HCD} = \dfrac{DH}{DC} = \dfrac{168}{175}$, d'où : $\widehat{HCD} \approx 73{,}74°$; or $\widehat{BCE} = 180° - 2 \times \widehat{HCD}$, d'où : $\widehat{BCE} \approx 32{,}52°$. Comme $EC = 84 / \sin \widehat{BCE}$ et $CB = 84 / \tan \widehat{BCE}$, on a donc : $EC \approx 156{,}25$ et $CB \approx 131{,}75$, d'où $L \approx 288$ (mm)

L'inconvénient, ici, est que les résultats sont approchés… En classe de 1ère (ou si l'on a eu l'opportunité de le montrer en seconde…) on peut travailler en valeurs exactes en passant par :

$\sin \widehat{BCE} = \sin(180° - 2 \times \widehat{HCD})$

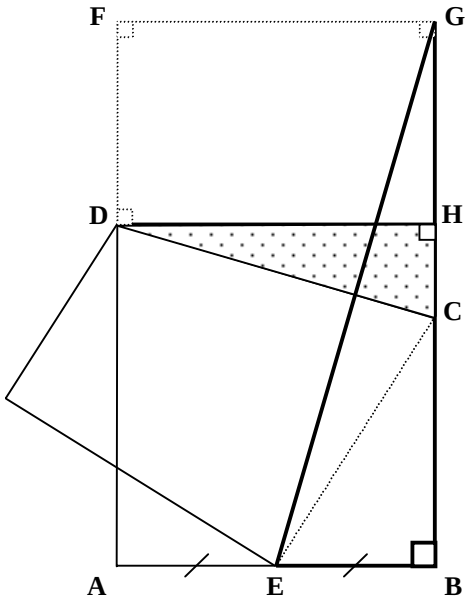
$= \sin 2 \times \widehat{HCD}$

$= 2 \times \sin \widehat{HCD} \times \cos \widehat{HCD}$ $\left(= 2 \times \dfrac{168}{175} \times \dfrac{49}{175}\right)$

Remarque : les élèves qui utilisent la trigonométrie pour cet exercice établissent des égalités de rapports… qui peuvent également s'interpréter par le fait que l'on a des triangles de même forme… à savoir les triangles BEG et HDC…

(*Indication* : comme CE = CG et DE = DG, la droite (CD) est la médiatrice du segment [EG] et donc les segments EG et CD sont bien perpendiculaires tout comme les segments BG et DH…)

En utilisant comme précédemment le fait que $\beta - \alpha = 49$ puis en écrivant l'égalité des rapports on obtient : $\dfrac{GB}{DG} = \dfrac{EB}{CH}$ c'est à dire $\dfrac{L}{168} = \dfrac{84}{49}$ qui amène L = 288 !



Exemples 2 : **en repérant des "configurations clés"…**

(en veillant cependant à ce qu'**une traduction immédiate des hypothèses permette des avancées suffisantes…**)

ÉTAPE 1 :

- *Si la situation est donnée par une figure ou une expression complète, il s'agit de les analyser région par région, de façon d'abord autonome, pour en **extraire des configurations-clés et les exploiter**.*
- *Si la situation est donnée par un énoncé, on fait la même chose en analysant les phrases.*

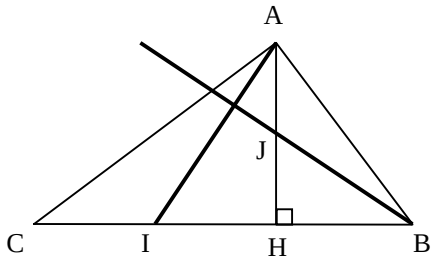
ÉTAPE 2 :
On "conjugue" les résultats obtenus à partir des diverses configurations-clés "régionales".

*Remarque : la mise en œuvre de cette méthode ne peut devenir efficace que dans la mesure où les élèves auront pu disposer d'un bon entraînement à la reconnaissance (≈ réflexes immédiats ?) **sur des configurations-clés…***

Exemple 2a :

Sur la figure ci-contre :

- le triangle ABC est rectangle en A
- le point I est le milieu du segment [CH]
- le point J est le milieu du segment [AH]

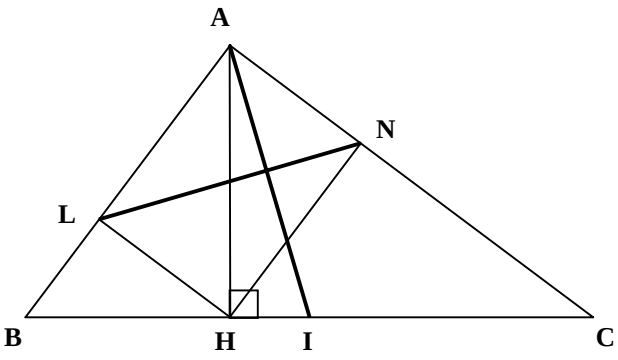


Position des droites (BJ) et (AI) ?

↳ - coder la figure,
- la présence de deux de milieux I et J respectivement des segments [CH] et [AH] peut entraîner le réflexe d'appel au "théorème des milieux" …
- puis... « *étant données deux droites parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est ...* »
- et enfin **reconnaissance de droites remarquables** dans un triangle ...

Exemple 2b :

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en A, H est le pied de la hauteur issue de A, L et N sont les projetés orthogonaux de H sur les côtés [AB] et [AC] et I est le milieu de l'hypoténuse [BC].



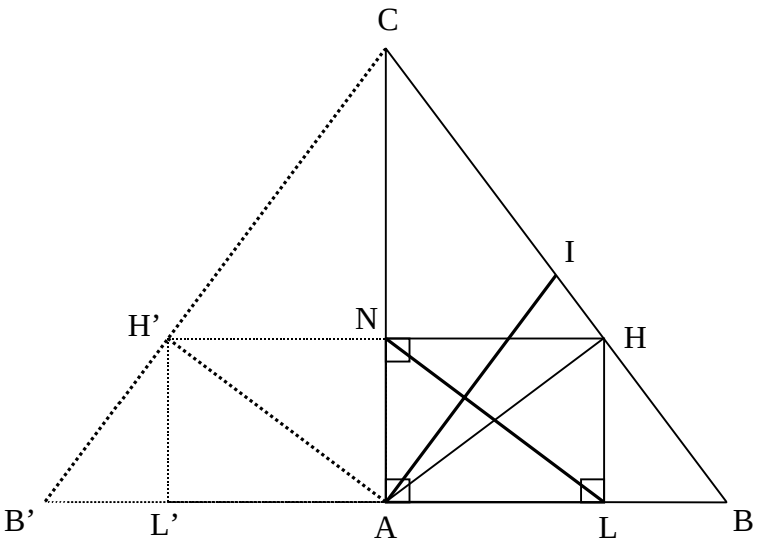
Position des droites (LN) et (AI) ?

On peut s'en sortir par des considérations angulaires, par exemple, en nommant α la mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ et par β celle de l'angle $\widehat{ACB}$ et en utilisant le fait que :

♦ AIC est isocèle en I (↳ "théorème de l'angle droit"…) et donc $\widehat{CAI} = \widehat{ICA} = \beta$

♦ qu'il y a de nombreux triangles de même forme, d'où $\widehat{LNA} = \alpha$

♦ que $\alpha + \beta = 90°$…



Solution "originale"…

On immerge, on plonge la configuration étudiée dans une configuration-clé **<u>à créer</u>** au lieu comme précédemment, d'en chercher à l'intérieur...

⇘ où l'on voit réapparaître la droite des milieux (AI) dans le triangle BCB'…
or ALNH' est un parallélogramme…