LIAISON BAC PRO – BTS EN MATHEMATIQUES

**Module complémentaire : Produit scalaire de deux vecteurs du plan**

**Niveau : T**erminale bac pro

**Durée** : 4 h

|  |  |
| --- | --- |
| **Objectifs** | |
| Objectif général | **Découvrir et utiliser le produit scalaire** |
| Connaissances | Définition du produit scalaire de deux vecteurs.  Formules exprimant sin (*a* + *b*) et cos (*a* + *b*) en fonction de cos *a*, cos *b*, sin *a*, sin *b.*  Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs : , ,  Vecteurs orthogonaux. |
| Capacités mathématiques | Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles.  Reconnaitre des vecteurs orthogonaux, à l’aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal. |
| Attitudes transversales | Le goût de chercher et de raisonner.  La rigueur et la précision. |
| Capacités cognitives | Capacité de représentation (donner du sens aux vecteurs et au produit scalaire).  Flexibilité mentale (par le changement de cadre et de présentation). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Déroulement** | |
| **Etape 1**  Introduction  **Phase magistrale**  **Support** : Tableau | Le produit scalaire est une opération qui s’applique aux vecteurs. Il constitue un outil qui facilite le travail dans de nombreuses applications. En mathématiques, il permet de déterminer des longueurs, des angles ou le caractère perpendiculaire de deux droites. En physiques, il est utilisé pour modéliser le travail et la puissance d’une force ou encore la puissance en courant alternatif. |
| **Etape 2**  Activité d’approche calculatoire  **Orthogonalité**  Source Math’x-Didier  *Introduction à l’expression analytique du produit scalaire*  **Phase individuelle**  **Support** : élève/cahier | On considère un repère orthonormé du plan.  1- Soit les points A(3 , 4) et B(-1 , 1). Le triangle OAB est-il rectangle en O ?  On attend que l’élève utilise le théorème de Pythagore. Dans ce cas : .  2- Condition d’orthogonalité  Soit M(*x* , *y*) et N(*x*’, *y*’) deux points distincts de O.  a) Ecrire une condition nécessaire et suffisante sur pour que le triangle OMN soit rectangle en O.  Réciproque du théorème de Pythagore :  b) Exprimer en foncti  on de *x*, *y*, *x’*, et *y*’.   (après développement et simplification).  c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur *x*, *y*, *x’*, et *y*’ pour que OMN rectangle en O.  . L’expression est appelée produit scalaire de et . |
| **Etape 3**  Activité d’approche  **Observation avec TIC**  Source Math’x-Didier  *1- Signe du produit scalaire*  *2- Introduction à l’expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal*  **Phase individuelle**  **Support** : élève/cahier + logiciel de géométrie (GeoGebra) | 1. Créer 3 points A, B et C puis les vecteurs et . Créer le produit scalaire (saisir p = u\*v dans la zone de saisie). 2. Déplacer le point C et observer le signe de . Emettre une conjecture. Déplacer A, B et C pour tester la conjecture.   On attend une conjecture du type : si l’angle alors est positif, si l’angle alors est négatif. Si l’angle alors est nul. |
| 1. Placer A et B sur l’axe des abscisses du repère et tels que AB = 6. Cacher les axes et faire apparaître la grille. 2. Conjecturer une expression du produit scalaire en fonction de AB et AC quand C appartient à la droite (AB).   On attend une conjecture du type si C appartient à [AB) et si C n’appartient pas à [AB).   1. Trouver un point C sur (AB) tel que . Trouver d’autres points C du plan tels que . Où semblent être situés les points trouvés ? Conjecturer l’ensemble des points C.   On attend une conjecture du type l’ensemble des points C est la droite perpendiculaire à (AB) et coupant [AB] en C’ tel que AC’ = 4.   1. Conjecturer de même l’ensemble des points C tels que .   Conjecture : droite perpendiculaire à (AB) et coupant [BA) en C’ tel que AC’ = 2 et BC’ = 8.   1. Proposer une nouvelle manière de calculer les coordonnées des vecteurs et . La tester sur le logiciel en déplaçant A, B et C.   On attend : si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors si H appartient [AB) et si H n’appartient pas à [AB). |

|  |  |
| --- | --- |
| **Etape 4**  **Cours**  Définitions  (3 expressions)  Propriétés  Carré scalaire  Orthogonalité  Colinéarité  Angle géométrique  **Phase magistrale**  **Support** : Prof/Tableau  Elève/cahier | Le produit scalaire de par , noté , est un nombre réel.  **Expression analytique** : soit et alors  **Expression avec le projeté**: si sont non nuls alors :    O  B  A  H  α  O  B  A  H  α    **Expression avec les normes**: |
| Commutativité :  Soit α un réel :  Distributivité sur l’addition : |
| est appelé carré scalaire de et noté .  Propriété : |
| Deux vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.  (Deux vecteurs orthogonaux non nuls ont des directions perpendiculaires.) |
| Deux vecteurs et sont colinéaires si et seulement si leur produit scalaire est égal au produit de leurs longueurs.  (Deux vecteurs et sont colinéaires si les points O, A et B sont sur une même droite.) |
| Si et sont deux vecteurs non nuls, alors l’angle se déduit de l’égalité . |
| **Etape 5**  **Exercices**  **Phase individuelle**  **Support** : élève/cahier | 1) Calculer le produit scalaire des vecteurs et dans les deux cas suivants.  a) ; ; b) ; ;  2) On considère un repère orthonormé du plan.  a) Développer l’expression .  b) Quelle propriété géométrique des vecteurs et en déduit-on ?  3) Soit et deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 4 et 5.  Calculer ; ;  4) Développer puis transformer l’expression pour retrouver l’expression du produit scalaire avec les normes. |
| **Etape 6**  **Exercices d’applications**  *1-Formule d’Al-Kashi*  *2-Equation du cercle*  *3-Formules d’addition*  **Phase individuelle**  **Support** : élève/cahier | 1- Le théorème d’Al-Kashi ou théorème de Pythagore généralisé relie dans un triangle, la longueur d'un côté à celles des deux autres et au cosinus de l'angle formé par ces deux côtés :  Ainsi dans le triangle ABC ci-contre :  Justifier cette égalité en développant l’expression , expression que l’on justifiera au préalable.  triangle2- Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(3 ; 2) et B(-4 ; 1) et le cercle C de diamètre [AB].   1. Effectuer une figure. 2. On considère un point M(*x* ; *y*) du cercle C.   Calculer, en fonction de *x* et *y*, les coordonnées des vecteurs et .  Écrire puis développer l’expression du produit scalaire.   1. Quelle est la nature du triangle MAB ? Qu’en déduit-on du produit scalaire ? 2. Les coordonnées de tout point M du cercle C sont donc solution de l’équation   appelée équation du cercle.  Vérifier que les coordonnées des points A et B sont solutions de cette équation.  Déterminer, par le calcul, l’ordonnée du point M si *x* = 1.  3- a) Réaliser une figure en plaçant sur un cercle trigonométrique deux points A et B ayant pour image respective les nombres *a* et *b* puis en faisant apparaître l’angle de mesure *a* - *b*.   1. Utiliser deux des trois expressions du produit scalaire pour exprimer en fonction de cos *a*, cos *b*, sin *a*, sin *b.* 2. En déduire les formules de en fonction de cos *a*, cos *b*, sin *a*, sin *b.* *NB* : |