

Suite de Syracuse

Énoncé

À tout n entier naturel ($n \geq 1$), on applique l'algorithme suivant :

Si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :

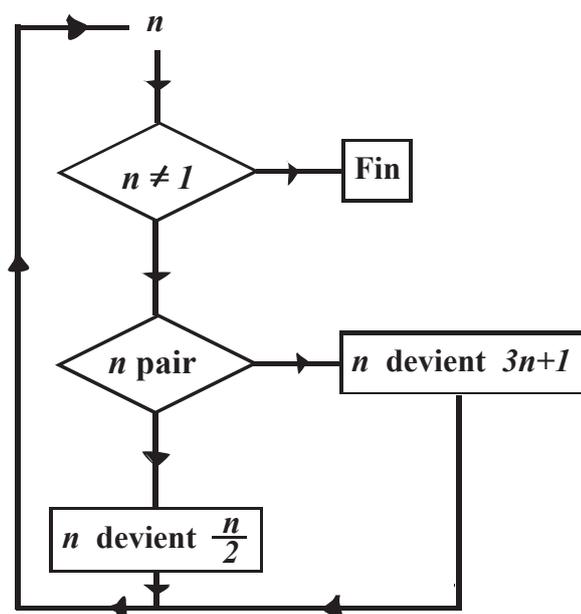
- si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$,
- si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.

On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce n .

Lorsque, pour l'entier n , l'algorithme aboutit à 1, on appelle " suite de Syracuse associée à n " la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.

On note $\mathcal{L}(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $\mathcal{L}(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n .

Exemple : pour $n = 5$ on obtient successivement les nombres $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ et donc $\mathcal{L}(5) = 6$.



1. (a) À l'aide d'un tableur, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.
- (b) Compléter alors la feuille de calcul en donnant les suites de Syracuse des 100 premiers entiers.
- (c) Préciser les valeurs de $\mathcal{L}(26)$ et $\mathcal{L}(27)$.

Appeler l'examineur pour vérification du tableau construit.

2. Etude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites $\mathcal{L}(n)$ pour n entier naturel.
 - (a) Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?
 - (b) Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme $8k + 4$ et $8k + 5$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Appeler l'examineur pour vérification des conjectures émises.

- (c) Démontrer conjecture émise en 2b).
3. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n .

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul n le processus aboutit à 1. La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.

Production demandée

- Construction du tableau des suites de Syracuse pour les 10 premiers entiers.
 - Le tableau pour les 100 entiers sera simplement visé par l'examineur.
 - Énoncé des conjectures du 2)
 - Preuve de 2b) et de 3).
-