# Quelques introductions possibles à la fonction exponentielle (en activités ou en cours)

Remarque préliminaire: *Même si chacune des activités présentées dans la suite a un intérêt spécifique, il semble difficilement envisageable de toutes les traiter.*

## 1. Approche par les suites géométriques

Exercice: Une ville a vu sa population augmenter de 10% chaque année.
Le 31 décembre 1990, elle comptait $u_0$ = 50 000 habitants. On note $u_n$ le nombre d'habitants à la date du 31 décembre de l'année 1990+n.
Calculer le nombre d'habitants de cette ville le 31 décembre 1991 et 1992. Quelle est la nature de la suite ($u_n$) ? En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n et le nombre d'habitants de cette ville le 31 décembre 2003.
Placer sur un graphique les points de coordonnées (n ;$u_n$) pour n entier, $0 \leq n \leq 13$. Proposer une méthode pour estimer le nombre d'habitants de cette ville à la fin du mois de juin de l'année 2003.

Commentaires
Cet exercice d'introduction permet de revenir sur les suites géométriques vues en première. Il ne présente pas de difficultés particulières (et peut donc être préparé à la maison par les élèves).

La dernière question montre la nécessité de passer à une modélisation plus fine (à défaut d'être continue) dans certains cas. Le débat en classe sur les réponses proposées à cette question ne peut qu'être enrichissant. On peut également demander une estimation de la population à d'autres dates mais il ne faut pas oublier que les élèves ne connaissent pas encore la racine n-ième d'un réel.

Cette approche est également intéressante en TES, pour bien visualiser que la croissance exponentielle est le pendant continu d'une croissance géométrique.

Enfin on peut remarquer que $u_{n+1}-u_n= 0,1\times u_n$ et faire le parallèle avec la formule obtenue de le cas d'une modélisation continue (y' = k y) dans d'autres activités.

## 2. Introduction de l'équation différentielle y'=ky. Présentation du phénomène de la radioactivité (d'après le document d'accompagnement)

L'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit $10^{23}$ ), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps $\Delta t$ à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux N(t) présents à l'instant t et au temps d'observation $\Delta t$, est une constante $\lambda$ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire : $\Delta N(t)/N(t)=-\lambda\Delta t$. ou encore

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t).$$

En faisant tendre $\Delta t$ vers 0, on trouve alors $N'(t)=-\lambda N(t)$ ou encore $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$.

Trouver les fonctions N qui satisfont cette condition , c'est résoudre l'équation différentielle $y'=-\lambda y$.
On peut pressentir que la donnée de la population $N(0)=N_0$ au départ détermine parmi les solutions trouvées celle qui décrira l'évolution de N (l'unicité de la solution peut être démontrée plus tard).

Le problème posé en termes mathématiques est alors le suivant :
**Résoudre l'équation différentielle** $y' = -\lambda y$.
C'est à dire chercher les fonctions f dérivables sur **R** qui vérifient que pour tout t $\in$ **R**, f'(t)=-$\lambda$ f(t).
Puis parmi celles-ci, celle qui vérifie f(0)=$N_0$.

Commentaires:
Cette approche, destinée à bien poser le problème, est assez délicate et doit sans doute être faite par le professeur en classe. Il n'est pas nécessaire d'en approfondir davantage l'aspect "physique" qui sera abordé par le professeur de physique.

### *3. Une approche graphique des fonctions solutions de f'(x)=f(x) .*

Préambule: Nous considérons ici l'équation différentielle : y'= y. Une fonction est une solution de cette équation différentielle, si elle est dérivable sur **R** et que pour tout réel *x*, on a *f* '(*x*) = *f* (*x*).
On peut remarquer que si *f* est une solution de l'équation différentielle y' = y. alors la fonction *g* définie par *g*(*x*)=k*f*(*x*) avec k un réel quelconque est également une solution et il existe alors une infinité de solutions à cette équation différentielle. L'activité suivante conduit à une construction des courbes intégrales (ce sont les courbes des fonctions solutions de l'équation différentielle) et permet de visualiser que la donnée d'une valeur de la fonction (b=f(a)) détermine cette fonction.

Activité: Supposons que (a ;b) sont les coordonnées d'un point M appartenant à la courbe représentative C d'une solution de l'équation différentielle.
1. Commençons tout d'abord par le point $M_1$ de coordonnées (0 ;1). Déterminer une équation de la tangente en $M_1$.
2. Soient $M_2$ ,$M_3$ et $M_4$ les points de coordonnées respectives(-1 ;2) et (2 ;1) et (0 ;-1) . Déterminer une équation de la tangente en chacun de ces points. Une même courbe peut-elle passer par $M_1$ et $M_4$?
3. Démontrer que, dans le cas général l'équation de la tangente T à C en M est $y = bx - ab + b$ . Quelle remarque peut-on faire sur le coefficient directeur de cette tangente ? M et M' étant deux points de même ordonnée que peut-on dire des tangentes en M et M' ?
4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 3cm), on considère les points dont les coordonnées (x ;y) vérifient $-2 \le x \le 4$ , $-2 \le y \le 2$, x=k/2 et y=k'/2 avec k et k' entiers. Pour chacun de ces points tracer un segment de tangente (environ 1 cm).
5. Admettons qu'il existe une unique fonction *f* solution vérifiant *f* (0) = 1 et pour tout réel *x*, *f* '(*x*) = *f* (*x*). Construire une ébauche de la courbe représentative de cette fonction. Quelle valeur approchée de *f*(1) obtient-on ?

Commentaires:
L'exploitation graphique de la relation y' = y (ou de tout autre équation différentielle) donne une première vision des solutions et permet de comprendre qu'il n'y a pas unicité si on ne se donne pas une condition supplémentaire. Ce travail permet en outre de bien comprendre ce qui se passe lorsqu'on utilise la méthode d'Euler pour approcher l'exponentielle.
Il est naturellement possible d'alléger le problème en se contentant de demander les coefficients directeurs des tangentes, mais comme cette approche se fait en début d'année, le calcul effectif des équations ( 4 cas particuliers en plus du cas général) constitue une révision de ce point du programme de première. Par ailleurs, pour ne pas perdre trop de temps dans la question 4, un élève doit arriver de lui-même à cette conclusion.
Le problème de l'existence de l'exponentielle (problème purement mathématique) ne se posera sans doute pas pour les élèves.
Il est conseillé de débuter cette activité en classe pour commenter les objectifs et s'assurer que tous les élèves comprennent bien.

## *4. Utilisation de la méthode d'Euler*

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable $f$ dont *la dérivée $f'$ est proportionnelle à la fonction $f$* elle-même ($f'=kf$). Nous allons observer l'une d'elle par la méthode d'Euler.

Soit $f$ une fonction dérivable sur **R** vérifiant $f(0)=1$ et pour tout $x$ : $f'(x)=f(x)$.

1. Montrer que, pour tout réel $a$ et $h$ ($h$ voisin de 0), l'approximation affine de $f$ en $a$, s'écrit : $f(a+h) \approx f(a) \times (1+h)$
2. Appliquer cette formule avec $a=0$, $a=h$, $a=2h$, ... En déduire que, si l'on part de $f$ (0), la suite des valeurs approchées de $f(x)$ obtenues par la méthode d'Euler, avec le pas $h$, est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
3. Construire point par point sur le même graphique, une représentation graphique approchée de $f$ en prenant un pas $h$ de 0,5 puis de 0,1. Prolonger la courbe sur l'intervalle [-1;2] avec la même méthode (pas $h$ de 0,1).

➢ *A l'aide d'un tableur, on peut représenter cette fonction de manière encore plus précise et sur un intervalle plus large.*

**La fonction *f*, appelée exponentielle, sera étudiée ultérieurement.**

4. Valeur approchée de $f(1)$ : on se place sur l'intervalle [0;1] que l'on subdivise en $n$ intervalles. Le pas $h$ vaut donc ici $\frac{1}{n}$.

   a) Montrer que la valeur approchée de $f(1)$ obtenue par cette méthode est $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

   b) Donner la valeur approchée de $f(1)$ correspondant à $n$ =10 000. On admettra que la suite de terme général $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge et on notera $e$ sa limite.

Commentaires :
Cette activité peut-être modifiée pour être traitée en salle info si les moyens le permettent.
Il est également possible de traiter cette activité dans le chapitre "suites".

## *5. Introduction à partir de la relation fonctionnelle*

Considérons une population dont le nombre dépend du temps et notons ce nombre, à la date $t$, $f(t)$.
Dans un certain nombre de cas (voir exercice 1), l'augmentation relative $\frac{f(t_0+t)}{f(t_0)}$ entre deux dates $t_0$ et $t_0+t$ ne dépend que de la durée $t$. On a alors $\frac{f(t_0+t)}{f(t_0)} = g(t)$. En choisissant une unité convenable, on peut considérer que la taille de la population au départ était égale à 1 ( $f(0) = 1$).
On obtient alors successivement $f(t) = g(t)$ (en choisissant $t_0 = 0$) pour tout $t$ , puis $f(t+t') = f(t) \times f(t')$ pour tout $t$ et $t'$. Nous sommes ainsi conduits à étudier les fonctions qui satisfont cette relation fonctionnelle.

Commentaires:
Le programme laisse le choix de l'introduction de la fonction exponentielle: Partir de y'=y ou de f(a+b)=f(a)f(b). L'important étant, bien entendu, d'arriver au même point. Pour ce faire, on peut procéder comme suit:

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur **R** vérifiant pour tout t et t' $f(t+t') = f(t)\times f(t')$.

1. Démontrer que si *f* s'annule en un point alors *f* est identiquement nulle.(on suppose dans la suite que ce n'est pas le cas)
2. Démontrer que *f*(0) = 1 et que pour tout réel *x*, on a *f*(*x*) >0.
3. Posons *f* '(0) = k. En calculant de deux manières la dérivée de $x \mapsto f(a+x) - f(a)f(x)$ démontrer que pour tout réel *x* on a : $f'(x) = kf(x)$.

## 6. Définition et premières propriétés de la fonction exponentielle

Préambule : Quelque soit le mode d'introduction et les activités choisies, il convient de clarifier la situation en indiquant clairement ce que l'on admet. C'est le but de l'activité suivante. Elle est conceptuellement plus difficile et doit être traitée en classe. Les résultats obtenus sont des théorèmes du cours, ce qui minimise le temps "perdu" à la traiter.

Activité: L'étude faite dans les question précédentes nous amène à conjecturer l'existence de solutions à l'équation différentielle y'=y (ce sont les fonctions dont on peut tracer les représentations graphique de manière approchée en « suivant » les tangentes tracées en 3.). Cependant ces constatations ne constituent pas une preuve. Pour poursuivre notre étude nous sommes conduit à admettre un résultat :
« Il existe une fonction *f* dérivable sur **R** qui est solution de y'=y et qui vérifie *f*(0)=1. »
Nous allons étudier dans la suite les conséquences de cette conjecture (dans la suite du problème *f* désignera toujours cette fonction).

1. Posons F(x)=*f*(*x*). *f*(-*x*). Calculer la dérivée de F. En déduire que *f* (*x*) ≠0 pour tout *x*.
2. Supposons que g est une (autre) solution de y'=y. Posons $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.Démontrer que *h* est dérivable sur **R**, que *h*'(*x*) = 0. En déduire que pour tout réel *x*, $g(x) = g(0)\times f(x)$,puis que *f* est la seule solution de l'équation différentielle qui prend la valeur 1 en 0.
3. Soit $a \in$ **R**. On considère la fonction *g* définie par $g(x) = f(a+x)$. Démontrer que *g* est une solution de l'équation différentielle y'=y. En déduire que pour tout réels *a* et *b*, on a : $f(a+b) = f(a)f(b)$.
4. *a* et *b* étant deux réels quelconques. En utilisant judicieusement l'égalité démontrée à la question précédente et *f*(0)=1, calculer $f(-a)$ et $f(a-b)$.

   Démontrer que pour tout *n* entier relatif $f(na) = (f(a))^n$.

Commentaires: La question 2 prouve que les solutions de *y*' = y sont les fonction $f_k$ définies par $f_k(x) = k\exp(x)$.
Le calcul de *f* (-*a*) peut être fait dès la question 1.
En posant *a* = 1 à la fin de la question 4, on retrouve que exp(*n*) = $e^n$ pour tout *n* entier. I ne reste plus qu'à définir $e^x$ comme exp(*x*) pour tout *x* réel. On (re)trouvera alors que $e^{1/2} = \sqrt{e}$ à partir de $(\exp(x/2))^2 = \exp(x)$ (qui prouve également la positivité de exp).

Commentaires après essai: Classe de 33 élèves (sérieux, dont le niveau est hétérogène: de très insuffisant à excellent) suivant tous la spécialité maths. Les chapitres abordés auparavant : Récurrence, suites monotones, suites bornées. Dérivation (avec en particulier des exercices sur l'approximation affine et un exercice sur la méthode d'Euler). Multiples diviseurs et nombres premiers.

En physique, les élèves avaient procédé à une simulation du phénomène de la radioactivité. (on lance une centaine (insuffisant) de dés. Ceux qui donnent "6" sont désintégrés. On relance….

1. Approche par les suites géométriques.
   Traitée en classe entière (environ 15 minutes). On utilise la calculatrice pour le graphique.
   Réponses proposées à la dernière question:
   - moyenne arithmétique ou méthode s'y ramenant . On leur demande comment cela s'interprète graphiquement( les élèves sont conscients qu'il s'agit d'une approximation _par excès lorsqu'on leur demande)
   – Tracé de la courbe à mains levé.
   – Utilisation de l'exposant 12,5 (qu'est ce que cela signifie?). On peut justifier ce résultat en considérant que l'augmentation de population reste proportionnelle à la population sur une période de 6 mois ($q'^2=q$)

2. J'ai présenté cette partie en cours début octobre (environ 15 minutes) et avant que les élèves traitent la partie 1. Un exercice traitant du phénomène de la radioactivité a été traité en fin de chapitre.

3. L'activité a été abordée pendant une séance ( une heure) de travail en groupe. Quatre élèves mis à part, tous sont allés jusqu'au tracé de la courbe durant la séance et quelques uns ont pratiquement terminé l'activité suivante (que j'ai donné à faire pour la séance de cours suivante).
   * Peu de difficultés rencontrées pour le passage de y'=y à la détermination du coefficient directeur de la tangente(Q1 et 2).
   * Même ordonnée dont même coefficient directeur. Le mot parallèle n'apparaît pas toujours(Q3).
   * La lecture de l'énoncé (Q4) est délicate pour les élèves: "les points dont les coordonnées (x ;y) vérifient $-2 \leq x \leq 4$ , $-2 \leq y \leq 2$" n'est pas perçu de manière naturelle comme un rectangle (c'est bien sur l'occasion de revenir sur la notion d'équation). De même, x=k/2 avec k entier n'est pas forcément évocateur: Certain ont besoin d'être guidés à ce stade: Qu'est ce qu'un entier? quels sont les nombres qui s'écrivent k/2? parmi ces nombres quels sont ceux qui sont entre –2 et 4? Ce type de travail est très utile pour que les élèves puissent aborder certaines notations que l'on rencontrera en fin d'année en particulier lors de l'introduction au calcul intégral.
   * Les élèves trouvent qu'il y a beaucoup de droites à tracer(Q4). On peut alors leur faire remarquer qu'en s'organisant bien cela peut se faire rapidement.
   * Tous les élèves n'ont pas compris le sens de la question (Q5). Parmi les "bonnes" réponses, la plus fréquente (une quinzaine) est le tracé d'une courbe à main levée. Deux élèves on construit une courbe-réunion de segments (la correspondance avec la méthode d'Euler _avec pas non nécessairement constant_ a été faite ultérieurement). Notons enfin que certains élèves essayent de tracer la courbe de manière à ce qu'elle admette plusieurs des tangentes déjà tracées (il est alors possible de les convaincre que ce n'est pas une bonne méthode).
   * A l'occasion de la correction, on peut tracer plusieurs courbes intégrales pour visualiser que si f est solution alors f(a+x) est aussi solution.

4. Cette activité a été donnée en exercice à la maison. Une construction à l'aide d'un tableur a été faite par les élèves lors de la séance en groupe la semaine suivante. A cette occasion, j'ai demandé aux plus rapides de construire des représentations pour différentes valeurs de f(0). Ceci permet, comme dans l'activité précédente de mettre en évidence que les courbes sont images les unes des autres par des translations (f(a+x) est aussi solution).
   Il est à noter que certain élèves exploitent la nature géométrique de la suite obtenue pour h>0 pour

obtenir les valeurs de f(x) pour x < 0 en divisant par (1+h). Ils n'utilisent plus la méthode d'Euler dans ce cas (qui se traduit par la multiplication par 1-h). On peut cependant leur faire remarquer que "multiplier par (1-h)" donne un résultat proche de "diviser par (1+h)" et leur demander pourquoi.

5. Je n'ai pas traité cette activité avec les élèves. Le fait que toute solution de l'équation fonctionnelle est une fonction exponentielle a été évoqué mais non démontré en cours.

6. Activité délicate mais très riche. Elle a été abordée en classe complète (environ 1 heure)_ à terminer pour la séance suivante.
   * Les difficultés les plus importantes se rencontrent à la question1:
   Travail sur une fonction dont on ne connaît pas l'expression, erreur de dérivation de f(-x), quelle conséquence à la condition F'(x)=0, que vaut la constante lorsqu'on a établi que F=cte. Il peut être bon de plus détailler la question.
   * Après une correction détaillée de la question1, les question 2 et 3 sont plus faciles à traiter (on retrouve les mêmes méthodes ). Pour Q3, il faut penser à utiliser Q2.
   * Pour Q4, on peut utiliser le résultat de Q1 (calcul de f(-x)) et il faut penser à une récurrence.
   * Les questions Q2 à Q4 ont été corrigées lors du cours sur la fonction exp.